数理解析研究所講究録
104巻 1970年 9-22

Trace の存在証明

名工大　小野貴生

§1. 序

Murray - v. Neumann は可分かつ factor な有限型 von Neumann 代数において trace の存在を証明し，Dixmier が一般の有限型 von Neumann 代数の場合に拡張した．Kadison はこれらの証明の簡易化を行った．また，Yen は十分に多くの p-normal な state をもつ有限型 AW* 代数において，Goldman は十分に多くの center の値をとる拡張された意味での p-normal な state をもつ有限型 AW* 代数において，それぞれ，center の値をとる trace の存在を証明した．いずれの証明も，Murray - v. Neumann に淵源する相対次元と p-normal な state との比較法に由っている．

この小文で，これに関聯して，つぎの定理の証明の概略をのべたい．

定理．有限型 AW* 代数において Dixmier trace が存在する．

§2. Reduction

Aを有限型 AW^*代数とする．以下 Z, H, P, U, Wは，それぞれ，Aの center，自己共役元，射影元，ユニタリ，準等距離元の全体とする．Aは主単位元をもつ．これを1で表はす．Pの次元函数をD，Aの restricted Dixmier trace をFで表はす．

Zの character λとZの極大イデアルNとは対応：

$$N = \{ z \, ; \, \lambda(z) = 0, \ z \in Z \}$$

により一対一に対応する（Gelfand）．Zの極大イデアルNとAの極大イデアルMとは対応：

$$N = M \cap Z$$

により一対一に対応する（Wright）．Aの極大イデアルMを任意にとると商代数A/Mは有限型 AW^*-factor になる．（Wright-Yen，Wright が Dixmier trace の存在を假定し，Yen がその假定をとり除いた．）この Wright-Yen の reduction 定理を使って，Yen は‘有限型 AW^*-代数における trace の存在問題は有限型 AW^*-factor における trace の存在問題に帰着できる’ことを示した．したがって，trace の存在証明をするためには，考察する有限型 AW^*代数は factor としてよい．

Aを有限型AW^*-factorとする．Aはdiscreteの場合とcontinuousの場合に別れるが，discreteの場合，Aは複素数体C上の有限n次の行列全体のつくる有限型AW^*-factor $(C)_n$と*同型で，$(C)_n$ではtrace tは

$$t(a) = (1/n)\sum_{i=1}^{n}(a)_{ii},$$

ここに$a\in(C)_n$，$(a)_{ij}$はaのij-成分，の形で存在するから，Aにもtraceが存在する．したがって，Aはcontinuousの場合，すなわちtype II_1 AW^*-factorの場合に限定してもよい．

Aはtype II_1型AW^*-factorとする．A（あるいは可算個のtype II_1型AW^*-factors $\{A_n\}$）から出発して新しいtype II_1 AW^*-factorをつくり出す方法が3つある．

i) $0\neq e\in P$をとって，eAeをつくる．これはKaplanskyにより，Aとともにtype II_1 AW^*-factorとなる．

ii) A上有限n次の行列全体$(A)_n$をつくる．これはBerberianにより，Aとともにtype II_1 AW^*-factorとなる．

iii) $\{A_n\}$のKaplanskyの意味におけるC^*-sum Kをつくる．Kのcenterをmとおく．mはCの有界数列全体のつくる可換AW^*-algebraになる．mのbasis $\{\xi_j\}$（$\xi_j=\{\delta_{ij}\}_{i=1}^{\infty}$，

δ_{ij} は Kronecker delta ）をとり，$\lambda(\xi_j)=0$ for $\forall j$ となる m の character 全体を Δ とする．K は有限型 AW^* 代数で，$\lambda\in\Delta$ を任意にとって，λ に対応する K の極大イデアル M による K の商代数 K_λ をつくれば，Wright-Yen の reduction 定理により，K_λ は $\{A_n\}$とともに type II_1 AW^*-factor になる．

A から出発して，行列代数 $(A)_n$ $(n\geqq 1)$ をつくり，$\{(A)_n\}$ の全体を Ψ とし，$B_n\in\Psi$ $(n\geqq 1)$ をとり，$\{B_n\}$ の C^*-sum K をつくり，任意の $\lambda\in\Delta$ に対し K_λ をつくる，このようにしてできる K_λ の全体を Φ とし，Φ にぞくする type II_1 AW^*-factor の部分 Banach * 代数となる type II_1 AW^*-factor の全体を Γ で表はす．type II_1 AW^*-factor B が Γ にぞくする type II_1 AW^*-factor と * 同型になることを '$B\rho\Gamma$' で表はす．

補助定理 1．Γ はつぎの性質をもつ：

1） $A\rho\Gamma$，

2） $B\rho\Gamma$ かつ e が B の 0 でない射影元ならば $eBe\rho\Gamma$，

3） $B\rho\Gamma$ ならば $(B)_n\rho\Gamma$ for $\forall n$，

4） $B_n\rho\Gamma$ $(n\geqq 1)$ かつ $\lambda\in\Delta$ ならば $K_\lambda\rho\Gamma$，ここに K_λ は $\{B_n\}$ の C^*-sum K の λ に対応する極大イデアルによる商代数．

次節においては，与えられた type II_1 AW*-factor A から出発して Γ をつくり，$\rho\Gamma$（$\in\Gamma$ といっても本質的に同じ）となる type II_1 AW*-factor のみを考察する．すなわち，無制限に広いはんいの type II_1 AW*-factor は考えない．いちいち $\rho\Gamma$ であることは断らない．また，記号 A は $\rho\Gamma$ となる任意の type II_1 AW*-factor に使う．

§3．射影元の1次不等式の変形．

II_1 型 AW*-factor A における射影元の一次結合不等式

(1) $\sum_{i=1}^{n} e_i \leqq \eta$ （または $\geqq \eta$）

を簡単のため第一種（または第二種）の関係式という，ここに，n は自然数，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ は A の射影元の系，η は実数で，

(2) $\rho = \sum_{i=1}^{n} D(e_i)$

とおく．このとき，この関係式は A で定義されているという．

関係式の素材

(3) $(n, \leqq, \eta, \rho)$ （または $(n, \geqq, \eta, \rho)$）

は，適当な II_1 型 AW*-factor A が存在して，そこで定義された関係式(1)で(3)をみたすものがあるとき，この関係式(1)によって実現される，あるいは単に実現されるという．このとき，関係式(1)を(4)を実現する関係式という．以降

，関係式の素材を単に素材という．素材(3)は不等号の向きが $\leqq$ (または $\geqq$)であるとき第一種(または第二種)であるという．

素材 $(n, \leqq, \eta, 0)$ は関係式 $\sum_{i=1}^{n} 0 \leqq \eta$ により，素材 $(n, \geqq, \eta, n)$ は，$\eta \leqq n$ のとき，関係式 $\sum_{i=1}^{n} 1 \geqq \eta$ により，それぞれ実現されている．

素材

(4)　$(n, \leqq, \eta, \rho^*)$ (または $(n, \geqq, \eta, \rho^*)$)

が，ρ を適当にとると素材(3)が実現されていて，

(5)　$\rho^* = \sup$ (または $\inf$) $\{\rho$; 素材(3)が実現される$\}$

をみたすとき，この素材は最適であるという．

関係式(1)または素材(3)は

(6)　$\eta = 0$ または $\rho = 0$

であるとき trivial であるという．関係式(1)は

(7)　$e_1 \cup \cdots \cup e_n = 1$ または $\eta = \rho = 0$

であるとき正規であるという．関係式(1)は

(8)　$D(e_1) = \cdots = D(e_n)$

であるとき，均質であるという．

最適な素材に関してつぎの3つの基本的な補助定理が成り立つ．

補助定理2. 最適な素材は実現される.

補助定理3. η が

(9) $\quad 0 \leqq \eta \leqq n$

をみたすとき, 最適な素材 (4) は存在する.

補助定理4. trivial でない最適な素材を実現する関係式は正規である.

最適な素材の変形に関してつぎの3つの基本的な補助定理が成り立つ.

補助定理5. 素材 (4) が最適で (9) が成り立つとき素材

$$(n, \geqq, n-\eta, n-\rho^*) \quad (\text{または } (n, \leqq, n-\eta, n-\rho^*))$$

は最適である.

補助定理6. 素材 (4) が最適で

(10) $\quad 1 \leqq \eta \leqq n$

が成り立つとき素材

$$(n, \geqq, n/\eta, n/\rho^*) \quad (\text{または } (n, \leqq, n/\eta, n/\rho^*))$$

は最適である.

補助定理7．素材 $(n, \leqq, r, \rho^*)$（r は自然数）が最適で(10)が成り立つとき素材

$$(r(n-r), \leqq, r, (n-r)\rho^*/(n-\rho^*))$$

は最適である．

以下，

(11)　$n \geqq 5$

とし，

$$\eta_1 = (n-\sqrt{n^2-4n})/2 \quad , \quad \eta_2 = (n+\sqrt{n^2-4n})/2$$

とおいて，

(12)　$\eta_1 < \eta < \eta_2$

とする．$f(t) = n-t$，$g(t) = n/t$，$S(t) = g \circ f(t)$ とおけば，f，g は t の減少函数，S は t の増加函数で，η_1，η_2 は S の不動点で，

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta_1 \eta_2 = n.$$

(12)は f，g，S で範囲が不変．$\xi_0 = 2$，$\xi_{n+1} = S(\xi_n)$ $(n = 0, \pm 1, \cdots)$ によって $\{\xi_n\}$ を定義する．(12) は範囲

$$\xi_{n+1} \leqq \eta \leqq \xi_n$$

の和集合となる．

つぎの3つの補助定理を準備する．

補助定理8．最適な素材 $(n, \leqq, 2, \rho^*)$ が存在して，

(13) $2 \leqq \rho^* \leqq n/2$.

補助定理9．最適な素材(4)が存在して，

(14) $\eta_1 < \rho^* < \eta_2$.

補助定理10. 最適な素材(4)は trivial でない均質な関係式によって実現される．

補助定理8を強化して，

補助定理11．最適な素材 $(n, \leqq, 2, \rho^*)$ が存在して，

(15) $2 \leqq \rho^* < n/2$.

τ_0 を素材 $(5, \leqq, 2, 5/(2+\tau_0))$ が最適ということで定義する．$2 \leqq 5/(2+\tau_0) < 5/2$ から

(16) $0 < \tau_0 < \infty$.

$\{m_s\}$ $(s \geqq 0)$ を

(17) $m_0 = 5$, $m_{s+1} = 2(m_s - 2)$ $(s \geqq 0)$

で定義する，すなわち

$$m_s = 4 + 2^s \quad (s \geqq 0).$$

$\{\alpha_s\}$ $(s \geqq 0)$ を

(18) $\quad \alpha_0 = 5/(2+\tau_0), \quad \alpha_{s+1} = (m_s - 2)\alpha_s/(m_s - \alpha_s) \quad (\alpha \geqq 0)$

で定義する，すなわち

$$\alpha_s = (4+2^s)/(2+\tau_0 \cdot 2^s) \quad (s \geqq 0)$$

であって

(19) $\quad \alpha_s \longrightarrow 1/\tau_0 \quad (s \to \infty)$.

各 s に対して，$r = r_s = m_s/2$ とおいて，$\{n_k\}$ を

(20) $\quad n_0 = 2r, \quad n_{k+1} = r(n_k - r) \quad (k \geqq 0)$

で定義する，すなわち

$$n_k = r^2/(r-1) + \beta r^k \quad (k \geqq 0),$$

ここに，β は

(21) $\quad n_0 = r^2/(r-1) + \beta$

によってきめる．$\{\beta_k\}$ を

(22) $\quad \beta_0 = 2r(1 - 1/\alpha_s), \quad \beta_{k+1} = (n_k - r)\beta_k/(n_k - \beta_k) \quad (k \geqq 0)$

で定義する，すなわち

$$\beta_k = (r^2/(r-1) + \beta r^k)/(r/(r-1) + \alpha r^k) \quad (k \geqq 0),$$

ここに，α は

(23) $\quad \beta_0 = n_0/(r/(r-1) + \alpha)$

によってきめる．このとき，

(24) $\quad \beta_k \longrightarrow \beta/\alpha \quad (k \to \infty)$.

また，

(25) $\theta = (1-\tau_0)/\tau_0$

とおくと，

(26) $1 \leqq \theta < \infty$

で

(27) $\beta/(r\alpha) \to \theta \quad (s \to \infty)$.

つぎの　つの補助定理を準備する．

補助定理 12. $(n, \leqq, 2, \rho_n)$ $(n \geqq 5)$ を最適な素材とすれば，$\rho_n \uparrow 1/\tau_0$.

補助定理 13 . $(n, \leqq, r, \rho_n)$ $(n \geqq 5)$ を最適な素材とすれば，$\rho_n \uparrow \beta/\alpha$.

補助定理 14 . $0 < \theta\varepsilon < 1$ かつ $(n, \leqq, 1/(1-\varepsilon), \rho^*)$ が最適であれば，$\rho^* \leqq 1/(1-\theta\varepsilon)$.

補助定理 15. $(n, \leqq, r, \rho^*)$ が最適な素材とすれば，$\rho^* \leqq \theta r$.

補助定理 16. $\theta = 1$.

以上の準備の下に，

補助定理17．$\sum_{i=1}^{n} e_i \leqq \eta$ ならば $\sum_{i=1}^{n} D(e_i) \leqq \eta$．

§4．定理の証明．

補助定理を２つ準備する．

補助定理18．$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \leqq \eta$ ならば $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i D(e_i) \leqq \eta$，
ここに，η は実数，$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ は正の実数，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ は射影元の系．

補助定理19．$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \| \leqq \varepsilon$ ならば $| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D(e_i) | \leqq \varepsilon$，
ここに，$\varepsilon > 0$，$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ は実数の系，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ は射影元の系．

補助定理19を使って定理が証明できる．

定理の証明．A を II_1 型 AW^*-factor，F を A の restricted trace，$a, b \in H$ として

(28) $\quad F(a+b) = F(a) + F(b)$

が証明できれば，F は trace になって定理の証明が終る．

さて，$\varepsilon > 0$ を与える．$a \in H$ に対し，実数の系 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ と射影元の系 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ がとれて

(29) $\quad \| a - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \| \leqq \varepsilon$

かつ

(30) $\quad | F(a) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D(e_i) | \leqq \varepsilon$

ならしめうる．$b \in H$，$a+b \in H$ に対しても同様に，実数の系 $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$，$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_r\}$，射影元の系 $\{f_1, \cdots, f_m\}$，$\{g_1, \cdots, g_r\}$ がとれて

(31) $\quad \| b - \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j \| \leqq \varepsilon$

(32) $\quad | F(b) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j D(f_j) | \leqq \varepsilon$

(33) $\quad \| (a+b) - \sum_{k=1}^{r} \gamma_k g_k \| \leqq \varepsilon$

(34) $\quad | F(a+b) - \sum_{k=1}^{r} \gamma_k D(g_k) | \leqq \varepsilon$

ならめうる．(29)(31)(33) から

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j - \sum_{k=1}^{r} \gamma_k g_k \| \leqq 3\varepsilon ,$$

補助定理 19 を使って

(35) $\quad | \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D(e_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j D(f_j) - \sum_{k=1}^{r} \gamma_k D(g_k) | \leqq 3\varepsilon .$

(30)(32)(34)(35) から

$$| F(a) + F(b) - F(a+b) | \leqq 6\varepsilon .$$

$\varepsilon \downarrow 0$ ならしめて，(28) をうる．

§5. 補遺．

補助定理11を証明するためにつぎの補助定理が使はれる。

補助定理20. $xx^* \leqq x^*x \implies xx^* = x^*x$.

補助定理21. $0 \leqq a \leqq b$ かつ $F(a) = F(b) \implies a = b$

補助定理22. $F(e+f) = D(e) + D(f)$

補助定理23. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ は射影元の系で

$$D(e_1) = D(e_2) = D(e_3) = D(e_4) = 1/2$$

かつ

$$e_1 + e_2 \leqq e_3 + e_4$$

ならば,

$$e_1 + e_2 = e_3 + e_4 .$$

以上